11. Espace $\mathbb{R}^n$

11.1 NORME EUCLIDIENNE

11.1.1 Définition de $\mathbb{R}^n$

On désigne par $\mathbb{R}^n$ l'ensemble constitué de tous les n-tuples ordonnés $(x_1, \ldots, x_n)$ de nombres réels. Par la suite, les éléments de $\mathbb{R}^n$ seront notés indifféremment $\boldsymbol{x}$ ou $(x_1, \ldots, x_n)$.

On munit $\mathbb{R}^n$ des deux opérations suivantes: pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

et

$$\lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Avec ces deux opérations on vérifie immédiatement que $\mathbb{R}^n$ est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{R}$ de dimension n (fig. 11.1 et 11.2).

11.1.2 Définition de la norme euclidienne

Soit $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Le nombre réel positif ou nul $\|\boldsymbol{x}\|$ défini par

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

est appelé la *norme euclidienne* de $\boldsymbol{x}$.

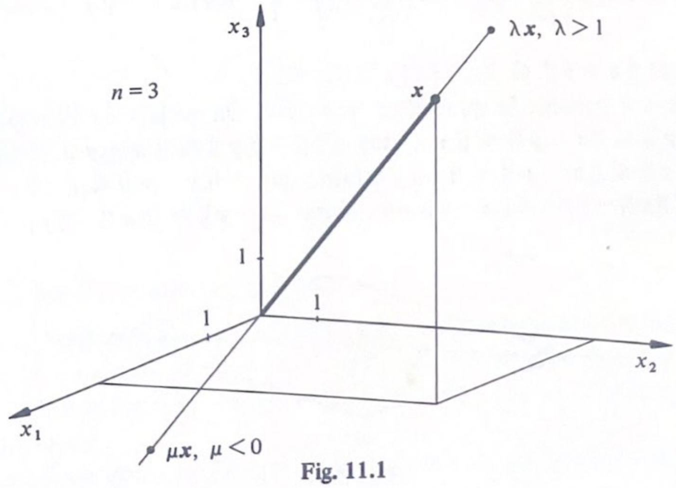


Fig. 11.1

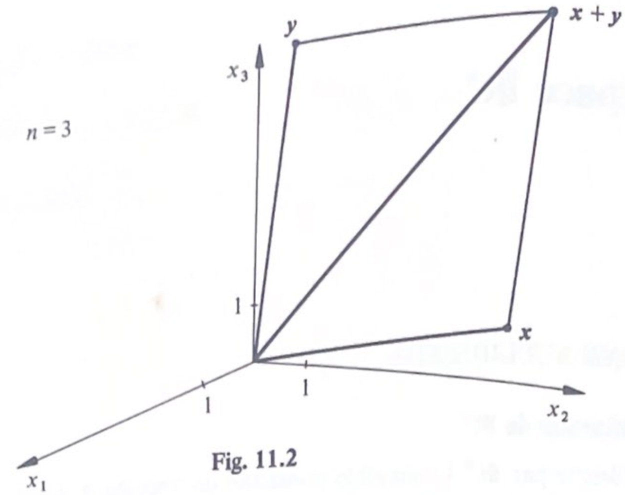


Fig. 11.2

11.1.3 Propriétés de la norme euclidienne

- $\|x\| = 0$ est équivalent à $x = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$: $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire);
- pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$: $\|x - y\| \geqslant \big|\|x\| - \|y\|\big|$ (inégalité triangulaire inverse).

DÉMONSTRATION. Les deux premières propriétés découlent immédiatement de la définition de la norme euclidienne. Montrons donc la troisième propriété. Comme

$$\|x + y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

on obtient, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (§ 6.4.4):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} (|x_i| \cdot |y_i|) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2},$$

que

$$\|x + y\|^2 \leqslant \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}\right)^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Par conséquent $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (fig. 11.3).

Montrons à présent la quatrième propriété. On déduit de l'inégalité $\|x\| = \|(x - y) + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|$, que $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$. De même, $\|y\| = \|(y - x) + x\| \leqslant \|x - y\| + \|x\|$ entraîne que $-\|x - y\| \leqslant \|x\| - \|y\|$. D'où $-\|x - y\| \leqslant \|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$ ou encore $\|x - y\| \geqslant \big|\|x\| - \|y\|\big|$. ∎

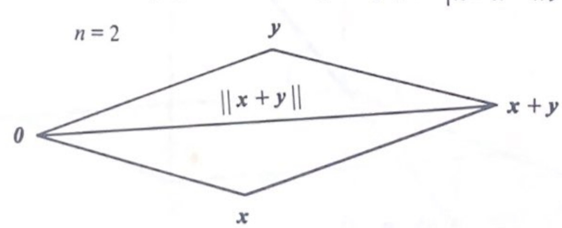


Fig. 11.3

11.2 SUITES DANS $\mathbb{R}^n$

11.2.1 Définition d'une suite dans $\mathbb{R}^n$

Une *suite* d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^n$, qui, à tout entier naturel k, fait correspondre l'élément $f(k)$ de $\mathbb{R}^n$.

L'élément $f(k)$ de $\mathbb{R}^n$ est appelé le *k-ième terme* de la suite et on le désigne par une lettre indexée en bas à droite par k, par exemple : $x_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k})$, la suite elle-même étant alors désignée par (x_k). Le sous-ensemble $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}^n$ est appelé l'ensemble des *éléments* de la suite. Si $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ est inclus dans un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$, on dit que (x_k) est une suite d'éléments de E.

11.2.2 Définition d'une suite bornée

Une suite (x_k) est dite *bornée* s'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N} : \|x_k\| \leqslant M$.

11.2.3 Caractérisation d'une suite bornée

Une suite $(x_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))$ est bornée si et seulement si les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont bornées.

DÉMONSTRATION. Supposons que la suite (x_k) soit bornée. Alors, il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout couple d'entiers $1 \leqslant j \leqslant n$ et $k \geqslant 0$:

$$|x_{j,k}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,k}^2\right)^{1/2} = \|x_k\| \leqslant M ;$$

ce qui entraîne que les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont bornées.

Réciproquement, supposons que les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ soient bornées. Alors, il existe n nombres réels positifs ou nuls $M_1, \ldots, M_n$ tels que pour tout couple d'entiers $1 \leqslant j \leqslant n$ et $k \geqslant 0 : |x_{j,k}| \leqslant M_j$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\|x_k\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,k}^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} M_i^2\right)^{1/2} ;$$

ce qui revient à dire que la suite (x_k) est bornée. ■

11.2.4 Définition d'une suite convergente

On dit qu'une suite (x_k) d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est *convergente* et admet pour *limite* $x \in \mathbb{R}^n$ si, à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel k_0 tel que la relation $k \geqslant k_0$ implique $\|x_k - x\| \leqslant \epsilon$. On écrit alors $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = x$, et on dit que la suite (x_k) *converge* vers x.

D'une manière générale, l'entier naturel k_0 dépend du nombre réel ϵ.

11.2.5 Définition d'une suite divergente

Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*. On dit aussi d'une telle suite qu'elle *diverge*.

11.2.6 Caractérisation des suites convergentes

Une suite $(x_k = (x_{1,k}, \dots, x_{n,k}))$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ converge vers $x = (x_1, \dots, x_n)$ si et seulement si pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$, la suite numérique $(x_{j,k})$ converge vers x_j.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Si la suite (x_k) converge vers x, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant k_0 : \|x_k - x\| \leqslant \epsilon$. Comme pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$|x_{j,k} - x_j| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{i,k} - x_i)^2 \right)^{1/2} = \|x_k - x\| \leqslant \epsilon ,$$

on peut conclure que $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{j,k} = x_j$.

Réciproquement, supposons que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$: $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{j,k} = x_j$. Alors, à chaque entier $1 \leqslant j \leqslant n$, on peut associer un entier naturel k_j tel que pour tout $k \geqslant k_j : |x_{j,k} - x_j| \leqslant \epsilon/\sqrt{n}$. Ainsi, en posant $k_0 = \max\{k_1, \dots, k_n\}$, on obtient que la relation $k \geqslant k_0$ implique

$$\|x_k - x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{i,k} - x_i)^2 \right)^{1/2} \leqslant \epsilon .$$

D'où le résultat. ∎

11.2.7 Unicité de la limite

La limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$, si elle existe, est unique.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser les résultats obtenus aux paragraphes 2.3.4 et 11.2.6. ∎

11.2.8 Exemple d'une suite convergente

Le résultat du paragraphe 11.2.6 nous permet d'affirmer, sans autre, que la suite $(x_k = (e^{-k}, 1))$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$ converge vers $x = (0,1)$ (fig. 11.4).

11.2.9 Propriété des suites convergentes

Toute suite convergente est bornée.

DÉMONSTRATION. Soit (x_k) une suite qui converge vers x. Alors, pour $\epsilon = 1$, il existe un entier naturel k_0 tel que pour tout $k \geqslant k_0 : \|x_k - x\| \leqslant 1$. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire inverse (§ 11.1.3), on obtient que pour tout $k \geqslant k_0 : \|x_k\| \leqslant 1 + \|x\|$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a: $\|x_k\| \leqslant \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_{k_0 - 1}\|, 1 + \|x\|\}$; ce qui revient à dire que la suite (x_k) est bornée. ∎

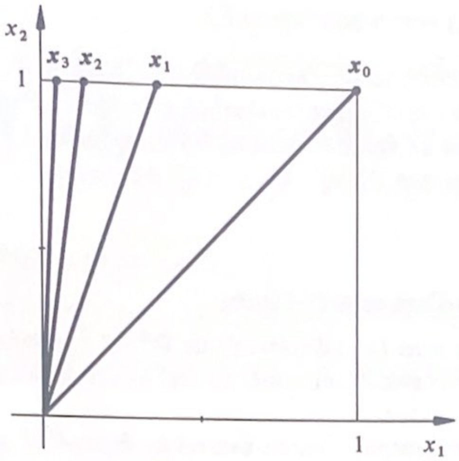


Fig. 11.4

11.2.10 Propriété de la limite d'une suite convergente

Soit (x_k) une suite qui converge vers x et supposons qu'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que pour $k \in \mathbb{N}$: $\|x_k\| \leqslant M$. Alors, $\|x\| \leqslant M$.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Alors, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$:

$$\|x\| - \|x_k\| \leqslant \|x - x_k\| \leqslant \epsilon\,;$$

ce qui entraîne que

$$\|x\| \leqslant \|x_k\| + \epsilon \leqslant M + \epsilon.$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée quel que soit $\epsilon > 0$, on peut conclure que $\|x\| \leqslant M$. ■

11.2.11 Opérations algébriques sur les suites

Considérons deux suites (x_k) et (y_k). On peut par addition et multiplication par un scalaire λ obtenir les nouvelles suites suivantes:

$$(u_k = x_k + y_k) \quad \text{et} \quad (v_k = \lambda x_k).$$

Supposons à présent que les deux suites (x_k) et (y_k) convergent respectivement vers x et y. Alors,

– la suite $(x_k + y_k)$ admet pour limite $x + y$.

  DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Etant donné que la suite (x_k) converge vers x, il existe un entier naturel k_1 tel que pour tout $m \geqslant k_1$: $\|x_m - x\| \leqslant \epsilon/2$. De même, il existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant k_2$: $\|y_p - y\| \leqslant \epsilon/2$. Ainsi, en posant $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, on obtient que pour tout $k \geqslant k_0$: $\|(x_k + y_k) - (x + y)\| \leqslant \|x_k - x\| + \|y_k - y\| \leqslant \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. ■

– la suite (λx_k) admet pour limite λx.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque et supposons que $\lambda \neq 0$ (dans le cas contraire, le résultat est évident). Puisque la suite (x_k) converge vers x, il existe un entier naturel k_0 tel que pour tout $k \geqslant k_0$: $\|x_k - x\| \leqslant \epsilon/|\lambda|$; ce qui entraîne que $\|\lambda x_k - \lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x - x_k\| \leqslant \epsilon$. ■

11.2.12 Définition d'une suite de Cauchy

On dit qu'une suite (x_k) d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une *suite de Cauchy* si à tout nombre réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel k_0 tel que les relations $k \geqslant k_0$ et $l \geqslant k_0$ impliquent $\|x_k - x_l\| \leqslant \epsilon$.

D'une manière générale, l'entier naturel k_0 dépend du nombre réel ϵ.

11.2.13 Caractérisation d'une suite de Cauchy

Une suite $(x_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))$ est une suite de Cauchy si et seulement si les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont des suites de Cauchy.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ un nombre réel positif quelconque. Si la suite (x_k) est une suite de Cauchy, il existe un entier naturel k_0 tel que pour tout couple d'entiers $k \geqslant k_0$ et $l \geqslant k_0$: $\|x_k - x_l\| \leqslant \epsilon$. Comme pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$|x_{j,k} - x_{j,l}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{i,k} - x_{i,l})^2\right)^{1/2} = \|x_k - x_l\| \leqslant \epsilon ,$$

on peut conclure que les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont des suites de Cauchy.

Réciproquement, supposons que les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ soient des suites de Cauchy. Alors, à chaque entier $1 \leqslant j \leqslant n$, on peut associer un entier naturel k_j tel que pour tout couple d'entiers $k \geqslant k_j$ et $l \geqslant k_j$: $|x_{j,k} - x_{j,l}| \leqslant \epsilon/\sqrt{n}$. Ainsi, en posant $k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$, on obtient que les relations $k \geqslant k_0$ et $l \geqslant k_0$ impliquent

$$\|x_k - x_l\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{i,k} - x_{i,l})^2\right)^{1/2} \leqslant \epsilon .$$

D'où le résultat. ■

11.2.14 Propriété caractéristique des suites de Cauchy

Une suite (x_k) est une suite de Cauchy si et seulement si elle est convergente.

DÉMONSTRATION. Si $(x_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))$ est une suite de Cauchy, les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont des suites de Cauchy (§ 11.2.13), donc convergentes (§ 2.7.3); ce qui implique (§ 11.2.6) que la suite (x_k) converge.

Réciproquement, si $(x_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))$ est une suite convergente, les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont convergentes (§ 11.2.6), donc de Cauchy (§ 2.7.3); ce qui implique (§ 11.2.13) que la suite (x_k) est une suite de Cauchy. ■

11.2.15 Définition d'une sous-suite

Une *sous-suite* d'une suite $(x_k$
application strictement croissante.
Une sous-suite d'une suite $(x_k$
suite extraite de (x_k).

11.2.16 Théorème de Bolzano-Wei

De toute suite bornée (x_k) o

DÉMONSTRATION. Comme la suit
entier $1 \leqslant j \leqslant n$:

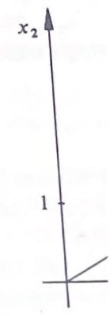
$$|x_{j,k}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,k}^2\right)^{1/2} = |$$

on peut affirmer que les n suites r
Ainsi, en utilisant le théorème 2.6
sous-suite $(x_{1,k(p_1)})$ qui converge
extraire de la suite $(y_{p_1} = x_{2,k(p_1)}$
puisque l'application $k_1 = k \circ p_1$:
$(x_{2,k_1(p_2)})$ sont deux sous-suite
obtient finalement une applicati
sous-suites numériques $(x_{1,k_{n-1}}$
quences (§ 11.2.6) que la sous-su
convergente.

11.3 TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}^n$

11.3.1 Définition d'une boule

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et t
$\|y - x\| < \delta\}$. Par définition,
rayon δ (fig. 11.5).



11.2.15 Définition d'une sous-suite

Une *sous-suite* d'une suite (x_k) est une suite $p \mapsto x_{k(p)}$, où $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Une sous-suite d'une suite (x_k) est aussi appelée une *suite partielle* ou encore une *suite extraite* de (x_k).

11.2.16 Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée (x_k) on peut extraire une sous-suite $(x_{k(p)})$ qui converge.

DÉMONSTRATION. Comme la suite $(x_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))$ est bornée et que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$|x_{j,k}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,k}^2 \right)^{1/2} = \|x_k\|,$$

on peut affirmer que les n suites numériques $(x_{1,k}), \ldots, (x_{n,k})$ sont bornées (§ 11.2.3). Ainsi, en utilisant le théorème 2.6.5, on sait que de la suite $(x_{1,k})$ on peut extraire une sous-suite $(x_{1,k(p_1)})$ qui converge. En utilisant de nouveau le théorème 2.6.5, on peut extraire de la suite $(y_{p_1} = x_{2,k(p_1)})$ une sous-suite $(y_{p_1(p_2)})$ qui converge. Il en résulte puisque l'application $k_1 = k \circ p_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, que $(x_{1,k_1(p_2)})$ et $(x_{2,k_1(p_2)})$ sont deux sous-suites qui convergent. En répétant n fois ce procédé, on obtient finalement une application $k_{n-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que les n sous-suites numériques $(x_{1,k_{n-1}(p_n)}), \ldots, (x_{n,k_{n-1}(p_n)})$ convergent; ce qui a pour conséquences (§ 11.2.6) que la sous-suite $(x_{k_{n-1}(p_n)}) = (x_{1,k_{n-1}(p_n)}), \ldots, x_{n,k_{n-1}(p_n)}))$ est convergente. ∎

11.3 TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}^n$

11.3.1 Définition d'une boule ouverte

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, on pose $B(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \delta\}$. Par définition, $B(x,\delta)$ est appelée la *boule ouverte de centre x et de rayon δ* (fig. 11.5).

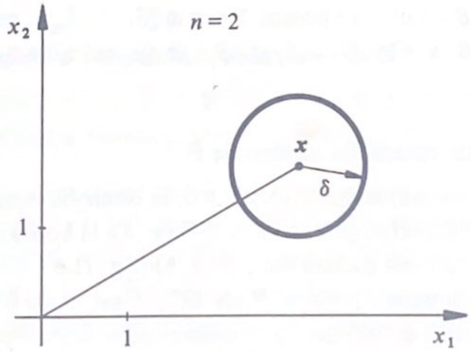


Fig. 11.5

11.3.2 Définition de l'intérieur d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Un point x est dit *intérieur* à E s'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset E$.

L'ensemble des points intérieurs à E est appelé *l'intérieur* de E et est noté $\overset{\circ}{E}$.

11.3.3 Définition d'un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$

On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est *ouvert* s'il est vide ou s'il ne contient que des points intérieurs.

11.3.4 Caractérisation d'un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ est ouvert si et seulement si $E = \overset{\circ}{E}$.

11.3.5 Propriétés des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$

- Toute réunion quelconque de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$;
- toute intersection finie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$. Montrons que

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

est ouvert. En effet, si $x \in A$, il existe au moins un $j \in I$ tel que $x \in A_j$. Puisque A_j est ouvert, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset A_j \subset A$.

Supposons à présent que $(B_i)_{i \in \{1, \ldots, m\}}$ soit une famille finie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ et montrons que

$$B = \bigcap_{i=1}^{m} B_i$$

est ouvert. En effet, si $x \in B$, alors x appartient à tous les B_i. Puisque tous les B_i sont ouverts, il existe m nombres réels positifs $\delta_1, \ldots, \delta_m$ tels que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant m : B(x, \delta_j) \subset B_j$. Ainsi, en posant $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$, on obtient que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant m : B(x, \delta) \subset B(x, \delta_j) \subset B_j$; ce qui entraîne que $B(x, \delta) \subset B$. ∎

11.3.6 Exemples de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, la boule ouverte $B(x, \delta)$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. En effet, pour tout $y \in B(x, \delta)$, la boule ouverte de centre y et de rayon $r = \delta - \|y - x\|$ est incluse dans $B(x, \delta)$ (fig. 11.6).

Pour tout sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$, $\overset{\circ}{E}$ est ouvert. C'est même le plus grand sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui soit contenu dans E. Autrement dit, si A est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans E, alors $A \subset \overset{\circ}{E}$.

11.3.7 Remarque

En général, une intersecti

sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. P

la forme $B(\mathbf{0}, 1/k)$ avec $k \in \mathbb{N}$

celui-ci n'est pas ouvert.

11.3.8 Définition d'un sous-en

On dit qu'un sous-ensem

$\{x \in \mathbb{R}^n : x \notin E\}$ est un sous-e

11.3.9 Caractérisation d'un s

Un sous-ensemble non vide

ments de E qui converge, con

DÉMONSTRATION. Suppos

de E qui converge vers $x \in \mathbb{R}$

et supposons que $x \notin E$. Alor

réel $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset$

résultat est impossible car x

quent $x \in E$.

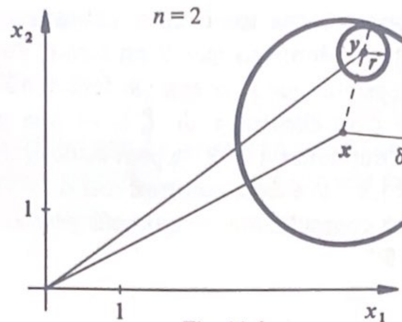


Fig. 11.6

11.3.7 Remarque

En général, une intersection infinie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ n'est pas un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, l'intersection de toutes les boules ouvertes de la forme $B(\mathbf{0}, 1/k)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ réduit au seul point $\mathbf{0}$, et celui-ci n'est pas ouvert.

11.3.8 Définition d'un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$

On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est *fermé* si son complémentaire $\complement E = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin E\}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ (fig. 11.7).

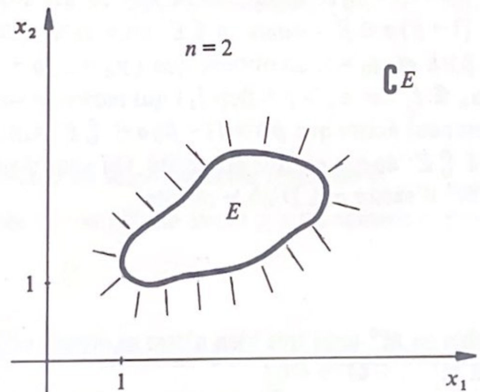


Fig. 11.7

11.3.9 Caractérisation d'un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si toute suite d'éléments de E qui converge, converge vers un élément de E.

DÉMONSTRATION. Supposons que E soit fermé et que $(\boldsymbol{x}_k)$ soit une suite d'éléments de E qui converge vers $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrons que $\boldsymbol{x} \in E$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $\boldsymbol{x} \notin E$. Alors, $\boldsymbol{x} \in \complement E$. Comme $\complement E$ est ouvert, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset \complement E$; ce qui entraîne que $\{\boldsymbol{x}_k : k \in \mathbb{N}\} \cap B(\boldsymbol{x}, \delta) = \phi$. Ce résultat est impossible car $\boldsymbol{x}$ est la limite de la suite $(\boldsymbol{x}_k)$. D'où contradiction. Par conséquent $\boldsymbol{x} \in E$.

Réciproquement, supposons que toute suite d'éléments de E qui converge, converge vers un élément de E. Montrons que E est fermé. Pour cela, raisonnons de nouveau par l'absurde et supposons que E ne soit pas fermé. Alors $\complement E$ n'est pas ouvert; ce qui implique l'existence d'un élément $\boldsymbol{x}$ de $\complement E$ tel que pour tout entier $k>0$: $B(\boldsymbol{x},1/k)\cap E\neq\phi$. Ainsi, à tout entier $k>0$, on peut associer un élément $\boldsymbol{x}_k$ de E vérifiant l'inégalité $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}\|<1/k$. On a donc construit une suite $(\boldsymbol{x}_k)$ d'éléments de E qui converge vers $\boldsymbol{x}\in\complement E$. D'où contradiction; ce qui nous permet de conclure que E est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. ∎

11.3.10 Sous-ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$

L'ensemble vide ϕ et $\mathbb{R}^n$ sont les deux seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ qui soient à la fois ouverts et fermés.

DÉMONSTRATION. Il résulte de la définition d'un ouvert que $\mathbb{R}^n$ et ϕ sont deux ouverts. Puisque l'un est le complémentaire de l'autre, ils sont aussi fermés.

Supposons à présent qu'il existe un autre sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui soit à la fois ouvert et fermé. Désignons-le par E. Puisque E et $\complement E$ ne sont pas vides, ils contiennent chacun au moins un élément, à savoir $\boldsymbol{a}\in E$ et $\boldsymbol{b}\in\complement E$. Posons $I_1=\{\lambda\in[0,1]:\lambda\boldsymbol{b}+(1-\lambda)\boldsymbol{a}\in E\}$. Comme $0\in I_1$, le nombre réel $\beta=\operatorname{Sup} I_1$ exsite. De la définition de β, on déduit l'existence d'une suite (λ_k) d'éléments de I_1 telle que $\lim_{k\to+\infty}\lambda_k=\beta$; ce qui entraîne, entre autres, que la suite $(\boldsymbol{x}_k=\lambda_k\boldsymbol{b}+(1-\lambda_k)\boldsymbol{a})$ d'éléments de E converge vers $\beta\boldsymbol{b}+(1-\beta)\boldsymbol{a}$. Etant donné que E est fermé, on peut affirmer (§ 11.3.9) que $\beta\boldsymbol{b}+(1-\beta)\boldsymbol{a}\in E$. Comme $\boldsymbol{b}\notin E$, on a aussi que $0\leqslant\beta<1$. Ainsi, en posant $\alpha_k=\beta+(1-\beta)/k$ et $\alpha_0=1$, on obtient que $(\boldsymbol{y}_k=\alpha_k\boldsymbol{b}+(1-\alpha_k)\boldsymbol{a})$ est une suite d'éléments de $\complement E$ ($\alpha_k\notin I_1$ car $\alpha_k>\beta=\operatorname{Sup} I_1$) qui converge vers $\beta\boldsymbol{b}+(1-\beta)\boldsymbol{a}$. Puisque $\complement E$ est fermé, on peut écrire que $\beta\boldsymbol{b}+(1-\beta)\boldsymbol{a}\in\complement E$. Ainsi, $\beta\boldsymbol{b}+(1-\beta)\boldsymbol{a}$ appartient à la fois à E et à $\complement E$; ce qui est une absurdité. On peut donc conclure qu'un tel sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ n'existe pas. D'où le résultat. ∎

11.3.11 Remarque

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ peut très bien n'être ni ouvert ni fermé. C'est le cas de l'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\in\mathbb{Q},\ y=0\}$.

11.3.12 Propriétés des sous-ensembles fermés

- Toute intersection quelconque de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$;
- toute réunion finie de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$. Montrons que

$$A=\bigcap_{i\in I}A_i$$

est fermé. En effet, puisque

$$\complement A=\bigcup_{i\in I}\complement A_i$$

et que tous les $\complement A_i$ sont ouverts, on obti

Supposons à présent que $(B_i)_{i\in\{1,\ .}$

fermés de $\mathbb{R}^n$ et montrons que

$$B=\bigcup_{i=1}^{m}B_i$$

est fermé. En effet, comme

$$\complement B=\bigcap_{i=1}^{m}\complement B_i$$

et que tous les $\complement B_i$ sont ouverts, on peu

11.3.13 Définition de l'adhérence d'un s

Puisque tout sous-ensemble E de I

poser la définition suivante: l'intersectio

l'*adhérence* de E et est notée $\bar{E}$.

De cette définition, il résulte immé

qui contienne E.

11.3.14 Caractérisation d'un sous-ense

Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est fe

11.3.15 Caractérisation de l'adhérence

Soit E un sous-ensemble non vid

soit la limite d'une suite d'éléments de

DÉMONSTRATION. Montrons que cette

par l'absurde et supposons que $\bar{E}$ poss

suite d'éléments de E. Alors, il existe u

conséquent, $E\subset\complement B(\boldsymbol{x},\delta)$. Comme

obtient que $\bar{E}\cap\complement B(\boldsymbol{x},\delta)$ est un sou

et qui contient E; ce qui est en contra

tré que la condition était nécessaire.

Reste à montrer qu'elle est suffi

d'éléments de E, $\boldsymbol{x}$ est aussi la limite d

on peut conclure (§ 11.3.9) que $\boldsymbol{x}\in\bar{E}$

est fermé. En effet, puisque

$$\complement A = \bigcup_{i\in I} \complement A_i$$

et que tous les $\complement A_i$ sont ouverts, on obtient (§ 11.3.5) que $\complement A$ est ouvert.

Supposons à présent que $(B_i)_{i\in\{1,\,...,\,m\}}$ soit une famille finie de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ et montrons que

$$B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$$

est fermé. En effet, comme

$$\complement B = \bigcap_{i=1}^{m} \complement B_i$$

et que tous les $\complement B_i$ sont ouverts, on peut affirmer (§ 11.3.5) que $\complement B$ est ouvert. ■

11.3.13 Définition de l'adhérence d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Puisque tout sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est contenu dans $\mathbb{R}^n$, qui est un fermé, on peut poser la définition suivante : l'intersection de tous les fermés contenant E est appelée l'*adhérence* de E et est notée $\overline{E}$.

De cette définition, il résulte immédiatement (§ 11.3.12) que $\overline{E}$ *est le plus petit fermé qui contienne E.*

11.3.14 Caractérisation d'un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si $E = \overline{E}$.

11.3.15 Caractérisation de l'adhérence d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour que $\boldsymbol{x} \in \overline{E}$ il faut et il suffit que $\boldsymbol{x}$ soit la limite d'une suite d'éléments de E.

DÉMONSTRATION. Montrons que cette condition est nécessaire. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $\overline{E}$ possède un élément $\boldsymbol{x}$ qui ne soit la limite d'aucune suite d'éléments de E. Alors, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{x},\delta) \cap E = \phi$. Par conséquent, $E \subset \complement B(\boldsymbol{x},\delta)$. Comme $\complement B(\boldsymbol{x},\delta)$ est fermé et que $\boldsymbol{x} \notin \complement B(\boldsymbol{x},\delta)$, on obtient que $\overline{E} \cap \complement B(\boldsymbol{x},\delta)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ strictement inclus dans $\overline{E}$ et qui contient E ; ce qui est en contradiction avec la définition de $\overline{E}$. On a ainsi démontré que la condition était nécessaire.

Reste à montrer qu'elle est suffisante. En effet, si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ est la limite d'une suite d'éléments de E, $\boldsymbol{x}$ est aussi la limite d'une suite d'éléments de $\overline{E}$. Comme $\overline{E}$ est fermé, on peut conclure (§ 11.3.9) que $\boldsymbol{x} \in \overline{E}$. ■

Réciproquement, supposons que toute suite d'éléments de E qui converge, converge vers un élément de E. Montrons que E est fermé. Pour cela, raisonnons de nouveau par l'absurde et supposons que E ne soit pas fermé. Alors $\complement E$ n'est pas ouvert; ce qui implique l'existence d'un élément x de $\complement E$ tel que pour tout entier $k > 0$, $B(x, 1/k) \cap E \neq \phi$. Ainsi, à tout entier $k > 0$, on peut associer un élément x_k de E vérifiant l'inégalité $\|x_k - x\| < 1/k$. On a donc construit une suite (x_k) d'éléments de E qui converge vers $x \in \complement E$. D'où contradiction; ce qui nous permet de conclure que E est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. ∎

11.3.10 Sous-ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$

L'ensemble vide ϕ et $\mathbb{R}^n$ sont les deux seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ qui soient à la fois ouverts et fermés.

DÉMONSTRATION. Il résulte de la définition d'un ouvert que $\mathbb{R}^n$ et ϕ sont deux ouverts. Puisque l'un est le complémentaire de l'autre, ils sont aussi fermés.

Supposons à présent qu'il existe un autre sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui soit à la fois ouvert et fermé. Désignons-le par E. Puisque E et $\complement E$ ne sont pas vides, ils contiennent chacun au moins un élément, à savoir $\boldsymbol{a} \in E$ et $\boldsymbol{b} \in \complement E$. Posons $I_1 = \{\lambda \in [0,1] : \lambda \boldsymbol{b} + (1-\lambda)\boldsymbol{a} \in E\}$. Comme $0 \in I_1$, le nombre réel $\beta = \operatorname{Sup} I_1$ exsite. De la définition de β, on déduit l'existence d'une suite (λ_k) d'éléments de I_1 telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_k = \beta$; ce qui entraîne, entre autres, que la suite $(\boldsymbol{x}_k = \lambda_k \boldsymbol{b} + (1-\lambda_k)\boldsymbol{a})$ d'éléments de E converge vers $\beta \boldsymbol{b} + (1-\beta)\boldsymbol{a}$. Etant donné que E est fermé, on peut affirmer (§ 11.3.9) que $\beta \boldsymbol{b} + (1-\beta)\boldsymbol{a} \in E$. Comme $\boldsymbol{b} \notin E$, on a aussi que $0 \leqslant \beta < 1$. Ainsi, en posant $\alpha_k = \beta + (1-\beta)/k$ et $\alpha_0 = 1$, on obtient que $(\boldsymbol{y}_k = \alpha_k \boldsymbol{b} + (1-\alpha_k)\boldsymbol{a})$ est une suite d'éléments de $\complement E$ ($\alpha_k \notin I_1$ car $\alpha_k > \beta = \operatorname{Sup} I_1$) qui converge vers $\beta \boldsymbol{b} + (1-\beta)\boldsymbol{a}$. Puisque $\complement E$ est fermé, on peut écrire que $\beta \boldsymbol{b} + (1-\beta)\boldsymbol{a} \in \complement E$. Ainsi, $\beta \boldsymbol{b} + (1-\beta)\boldsymbol{a}$ appartient à la fois à E et à $\complement E$; ce qui est une absurdité. On peut donc conclure qu'un tel sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ n'existe pas. D'où le résultat. ∎

11.3.11 Remarque

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ peut très bien n'être ni ouvert ni fermé. C'est le cas de l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y = 0\}$.

11.3.12 Propriétés des sous-ensembles fermés

- Toute intersection quelconque de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$;
- toute réunion finie de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$. Montrons que

$$A = \bigcap_{i\in I} A_i$$

est fermé. En effet, puisque

$$\complement A = \bigcup_{i\in I} \complement A_i$$

et que tous les $\complement A_i$ sont ou

Supposons à présent

fermés de $\mathbb{R}^n$ et montrons

$$B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$$

est fermé. En effet, comme

$$\complement B = \bigcap_{i=1}^{m} \complement B_i$$

et que tous les $\complement B_i$ sont ou

11.3.13 Définition de l'adhé

Puisque tout sous-ense

poser la définition suivante:

l'*adhérence* de E et est noté

De cette définition, il r

qui contienne E.

11.3.14 Caractérisation d'un

Un sous-ensemble E de

11.3.15 Caractérisation de l'

Soit E un sous-ensemb

soit la limite d'une suite d'élé

DÉMONSTRATION. Montrons

par l'absurde et supposons qu

suite d'éléments de E. Alors,

conséquent, $E \subset \complement B(\boldsymbol{x}, \delta)$.

obtient que $\bar{E} \cap \complement B(\boldsymbol{x}, \delta)$ es

et qui contient E; ce qui est e

tré que la condition était néce

Reste à montrer qu'elle

d'éléments de E, $\boldsymbol{x}$ est aussi la

on peut conclure (§ 11.3.9) qu

est fermé. En effet, puisque

$$\complement A = \bigcup_{i \in I} \complement A_i$$

et que tous les $\complement A_i$ sont ouverts, on obtient (§ 11.3.5) que $\complement A$ est ouvert.

Supposons à présent que $(B_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ soit une famille finie de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ et montrons que

$$B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$$

est fermé. En effet, comme

$$\complement B = \bigcap_{i=1}^{m} \complement B_i$$

et que tous les $\complement B_i$ sont ouverts, on peut affirmer (§ 11.3.5) que $\complement B$ est ouvert. ■

11.3.13 Définition de l'adhérence d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Puisque tout sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est contenu dans $\mathbb{R}^n$, qui est un fermé, on peut poser la définition suivante : l'intersection de tous les fermés contenant E est appelée l'*adhérence* de E et est notée $\bar{E}$.

De cette définition, il résulte immédiatement (§ 11.3.12) que *$\bar{E}$ est le plus petit fermé qui contienne E.*

11.3.14 Caractérisation d'un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si $E = \bar{E}$.

11.3.15 Caractérisation de l'adhérence d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour que $x \in \bar{E}$ il faut et il suffit que x soit la limite d'une suite d'éléments de E.

DÉMONSTRATION. Montrons que cette condition est nécessaire. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $\bar{E}$ possède un élément x qui ne soit la limite d'aucune suite d'éléments de E. Alors, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \cap E = \phi$. Par conséquent, $E \subset \complement B(x, \delta)$. Comme $\complement B(x, \delta)$ est fermé et que $x \notin \complement B(x, \delta)$, on obtient que $\bar{E} \cap \complement B(x, \delta)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ strictement inclus dans $\bar{E}$ et qui contient E ; ce qui est en contradiction avec la définition de $\bar{E}$. On a ainsi démontré que la condition était nécessaire.

Reste à montrer qu'elle est suffisante. En effet, si $x \in \mathbb{R}^n$ est la limite d'une suite d'éléments de E, x est aussi la limite d'une suite d'éléments de $\bar{E}$. Comme $\bar{E}$ est fermé, on peut conclure (§ 11.3.9) que $x \in \bar{E}$. ■

11.3.16 Définition d'une boule fermée

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, l'adhérence de la boule ouverte de centre x et de rayon δ est égale à $\{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leqslant \delta\}$. Autrement dit, $\overline{B(x,\delta)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leqslant \delta\}$.

Par définition, $\overline{B(x,\delta)}$ est appelée la *boule fermée de centre x et de rayon δ.*

DÉMONSTRATION. Posons $A = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leqslant \delta\}$. Montrons que $\overline{B(x,\delta)} \subset A$. En effet, si $z \in \overline{B(x,\delta)}$ il existe une suite (z_k) d'éléments de $B(x,\delta)$ qui converge vers z (§ 11.3.15); ce qui entraîne que la suite $(z_k - x)$ converge vers $z - x$. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N} : \|z_k - x\| < \delta$, on obtient (§ 11.2.10) que $\|z - x\| \leqslant \delta$ ou encore $z \in A$.

Montrons à présent que $A \subset \overline{B(x,\delta)}$. En effet, si $v \in A$, la suite (v_k) définie par

$$v_k = x + \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)(v - x)$$

converge vers v. Comme de plus, pour tout $k \in \mathbb{N} : v_k \in B(x,\delta)$, on obtient (§ 11.3.15) que $v \in \overline{B(x,\delta)}$. ■

11.3.17 Définition de la frontière d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Un point x est dit *point frontière* de E si toute boule ouverte de centre x contient au moins un point de E et au moins un point de $\complement E$.

L'ensemble des points frontières de E est appelé la *frontière* ou encore le *bord* de E et est noté ∂E.

Il résulte immédiatement de cette définition que

- $x \in \partial E$ si et seulement si x est la limite d'une suite d'éléments de E et d'une suite d'éléments de $\complement E$;
- $\partial E \cap \mathring{E} = \phi$;
- $\overline{E} = \mathring{E} \cup \partial E$;
- $\partial E = \overline{E} \cap \complement \mathring{E} = \{x \in \overline{E} : x \notin \mathring{E}\}$;
- ∂E est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

11.3.18 Propriété de la frontière

Pour tout sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$, on a : $\partial \overline{E} \subset \partial E$.

DÉMONSTRATION. Soit $x \in \partial \overline{E}$ et soit δ un nombre réel positif quelconque. Alors, $B(x,\delta) \cap \overline{E}$ contient au moins un élément, à savoir y. Comme $y \in \overline{E}$, on sait que $B(y, \delta - \|y - x\|) \cap E \neq \phi$. Par suite, en constatant que $B(y, \delta - \|y - x\|) \subset B(x,\delta)$, on peut affirmer que $B(x,\delta) \cap E \neq \phi$. D'autre part, puisque $B(x,\delta) \cap \complement \overline{E} \neq \phi$ et $\complement \overline{E} \subset \complement E$, on peut écrire que $B(x,\delta) \cap \complement E \neq \phi$. On a ainsi démontré que pour tout nombre réel $\delta > 0 : B(x,\delta) \cap E \neq \phi$ et $B(x,\delta) \cap \complement E \neq \phi$; ce qui implique que $x \in \partial E$. Ce résultat étant vrai quel que soit x appartenant à $\partial \overline{E}$, on peut conclure que $\partial \overline{E} \subset \partial E$. ■

11.3.19 Frontière de l
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$
est égale à $\{y \in \mathbb{R}^n : \|$
De même, $\partial \overline{B(x}$

DÉMONSTRATION. Le
$\overline{B(x,\delta)} \cap \complement B(x,\delta) =$
$\{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| =$
Montrons à pré
(§ 11.3.18), il suffit d
la suite $(z_k = x + (1+$
de plus $z \in \overline{B(x,\delta)}$, o

11.3.20 Remarque
On sait (§ 11.3
Mais contrairement à
où $\partial B(x,\delta) = \partial \overline{B(x}$
Par exemple, pour E

11.3.21 Définition d
Un sous-ensem
tel que pour tout x

11.3.22 Définition
Un sous-ensen

11.3.23 Adhérence
L'adhérence d

DÉMONSTRATION.
ou nul tel que la re
(y_k) d'éléments de
obtient (§ 11.2.10)
Comme de plus $\overline{E}$

11.3.24 Exemple
Pour tout x

11.3.19 Frontière de la boule ouverte

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, la frontière de la boule ouverte $B(x, \delta)$ est égale à $\{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$. Autrement dit, $\partial B(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$. De même, $\partial \overline{B(x,\delta)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$.

DÉMONSTRATION. Le fait que $B(x,\delta)$ soit un ouvert entraîne que $\partial B(x,\delta) = \overline{B(x,\delta)} \cap \complement B(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leqslant \delta\} \cap \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \geqslant \delta\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| = \delta\}$.

Montrons à présent que $\partial \overline{B(x,\delta)} = \partial B(x,\delta)$. Puisque $\partial \overline{B(x,\delta)} \subset \partial B(x,\delta)$ (§ 11.3.18), il suffit de démontrer que $\partial B(x,\delta) \subset \partial \overline{B(x,\delta)}$. En effet, si $z \in \partial B(x,\delta)$, la suite $(z_k = x + (1 + 1/(k+1))(z - x))$ d'éléments de $\complement\, \overline{B(x,\delta)}$ converge vers z et comme de plus $z \in \overline{B(x,\delta)}$, on peut écrire que $z \in \partial \overline{B(x,\delta)}$. ■

11.3.20 Remarque

On sait (§ 11.3.18) que pour tout sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$: $\partial \overline{E} \subset \partial E$. Mais contrairement à ce que pourrait laisser faire croire le résultat du paragraphe 11.3.19 où $\partial B(x,\delta) = \partial \overline{B(x,\delta)}$, la frontière de E n'est généralement pas incluse dans celle de $\overline{E}$. Par exemple, pour $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$, on a : $\partial E = \mathbb{R}^2$, tandis que $\partial \overline{E} = \phi$.

11.3.21 Définition d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ est dit *borné* s'il existe un nombre réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in E$: $\|x\| \leqslant M$.

11.3.22 Définition d'un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ est dit *compact* s'il est à la fois fermé et borné.

11.3.23 Adhérence d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$

L'adhérence de tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

DÉMONSTRATION. Soit E un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ et M un nombre réel positif ou nul tel que la relation $x \in E$ implique $\|x\| \leqslant M$. Soit $y \in \overline{E}$. Alors, il existe une suite (y_k) d'éléments de E qui converge vers y. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\|y_k\| \leqslant M$, on obtient (§ 11.2.10) que $\|y\| \leqslant M$. Par conséquent $\overline{E}$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$. Comme de plus $\overline{E}$ est fermé, on peut affirmer que $\overline{E}$ est compact. ■

11.3.24 Exemple d'un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, la boule fermée $\overline{B(x,\delta)}$ est compacte.

11.3.25 Caractérisation d'un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de E, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E.

DÉMONSTRATION. Supposons que E soit compact et soit (x_k) une suite d'éléments de E. Puisque E est borné, on peut en extraire (§ 11.2.16) une sous-suite $(x_{k(p)})$ qui converge vers un élément x de $\mathbb{R}^n$. Comme de plus E est fermé, on sait (§ 11.3.9) que $x \in E$.

Réciproquement, supposons que de toute suite d'éléments de E, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E. Le résultat obtenu au paragraphe 11.3.9 implique que E est fermé. Reste à démontrer que E est borné. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il ne le soit pas. Alors, à chaque entier naturel k, on peut associer un élément y_k de E tel que $\|y_k\| > k$. Par conséquent, si $(y_{k(p)})$ est une sous-suite de (y_k), on obtient que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\|y_{k(p)}\| > k(p) \geqslant p$; ce qui entraîne que $(y_{k(p)})$ n'est pas bornée, donc pas convergente. Ainsi, de (y_k) on ne peut extraire aucune sous-suite qui converge; ce qui contredit l'hypothèse faite sur la suite (y_k). D'où E est borné. ∎

11.3.26 Lemme

Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ constituant un recouvrement de E (c'est-à-dire tel que $E \subset \bigcup_{i\in I} A_i$). Alors, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, la boule ouverte $B(x, \delta)$ est contenue dans au moins un des A_i.

DÉMONSTRATION. Pour cela raisonnons par l'absurde et supposons qu'un tel nombre δ n'existe pas. Alors, à chaque entier $k > 0$, on peut associer un élément x_k de E tel que la boule $B(x_k, 1/k)$ ne soit contenue dans aucun des A_i. De la suite (x_k), on peut extraire une sous-suite $(x_{k(p)})$ qui converge vers un élément x de E (§ 1.3.25). Puisque x appartient à un certain A_j et que A_j est ouvert, il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que $B(x, \beta) \subset A_j$. D'autre part, comme $\lim_{p\to+\infty} x_{k(p)} = x$, il existe un entier $p_0 > 2/\beta$ tel que $x_{k(p_0)} \in B(x, \beta/2)$. Ainsi, en constatant que pour tout $y \in B(x_{k(p_0)}, 1/k(p_0))$:

$$\|y - x\| \leqslant \|y - x_{k(p_0)}\| + \|x_{k(p_0)} - x\| < \frac{1}{k(p_0)} + \frac{\beta}{2} \leqslant \frac{1}{p_0} + \frac{\beta}{2} < \beta ,$$

on obtient que $B(x_{k(p_0)}, 1/k(p_0)) \subset B(x, \beta) \subset A_j$; ce qui est absurde. D'où le lemme. ∎

11.3.27 Théorème de Heine-Borel-Lebesgue

Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de toute famille de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ constituant un recouvrement de E, on peut extraire une famille finie qui est un recouvrement de E.

DÉMONSTRATION. Pour commencer, supposons que de toute famille de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ constituant un recouvrement de E, on peut extraire une famille finie qui

est un recouvrement de E, et s
que de (a_k) on peut extraire u
raisonnons par l'absurde et su
peut associer un nombre réel

$$F(x) = \{k \in \mathbb{N} : a_k \in$$

ne contienne au plus qu'un no

$$E \subset \bigcup_{x\in E} B(x, \delta(x)),$$

on peut affirmer l'existence d

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{p} B(x_j, \delta(x_j));$$

ce qui implique, entre autres

$$\bigcup_{j=1}^{p} F(x_j) = \bigcup_{x\in E} F(x$$

Ce résultat est impossible ca
ments. D'où contradiction. I
suite qui converge vers un él
11.3.25 nous permet de con

Montrons à présent la
soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille qu

$$E \subset \bigcup_{i\in I} A_i .$$

Ainsi, grâce au lemme 11.3.
tout $x \in E$, la boule ouvert
Alors, il existe $i_1 \in I$ tel qu
Si A_{i_1} ne contient pas E, le
ment, à savoir b_2. De plus,
E, il n'y a plus rien à démo
$\{x \in E : x \notin A_{i_1} \cup A_{i_2}\}$ et
s'arrête, car sinon on obtie
couple d'entiers $r \neq s$: $\|b_r$
est compact (§ 13.2.25). I

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{l} A_{i_k}.$$

Ainsi, s'achève la démonst

11.3.28 Définition d'un

Soit E un sous-ense
$\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n) : [0,1] \to$
Les points $\gamma(0)$ et $\gamma($
chemin.

est un recouvrement de E, et soit (a_k) une suite quelconque d'éléments de E. Montrons que de (a_k) on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons le contraire. Alors, à chaque élément x de E, on peut associer un nombre réel $\delta(x) > 0$ tel que l'ensemble

$$F(x) = \{k \in \mathbb{N} : a_k \in B(x, \delta(x))\}$$

ne contienne au plus qu'un nombre fini d'entiers naturels. Comme

$$E \subset \bigcup_{x \in E} B(x, \delta(x)),$$

on peut affirmer l'existence de p éléments $x_1, \ldots, x_p$ de E tels que

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{p} B(x_j, \delta(x_j));$$

ce qui implique, entre autres, que

$$\bigcup_{j=1}^{p} F(x_j) = \bigcup_{x \in E} F(x) = \mathbb{N}.$$

Ce résultat est impossible car $\cup_{j=1}^{p} F(x_j)$ ne contient au plus qu'un nombre fini d'éléments. D'où contradiction. Par conséquent, de la suite (a_k) on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de E. Ainsi, la caractérisation donnée au paragraphe 11.3.25 nous permet de conclure que E est compact.

Montrons à présent la réciproque. Pour cela, supposons que E soit compact, et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$E \subset \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Ainsi, grâce au lemme 11.3.26, on sait qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, la boule ouverte $B(x, \delta)$ est contenue dans au moins un des A_i. Soit $b_1 \in E$. Alors, il existe $i_1 \in I$ tel que $B(b_1, \delta) \subset A_{i_1}$. Si A_{i_1} contient E, il n'y a rien à démontrer. Si A_{i_1} ne contient pas E, le sous-ensemble $\{x \in E : x \notin A_{i_1}\}$ contient au moins un élément, à savoir b_2. De plus, il existe $i_2 \in I$ tel que $B(b_2, \delta) \subset A_{i_2}$. Si $A_{i_1} \cup A_{i_2}$ contient E, il n'y a plus rien à démontrer. Sinon, on recommence en prenant un élément b_3 de $\{x \in E : x \notin A_{i_1} \cup A_{i_2}\}$ et ainsi de suite... Après un nombre fini de fois, ce processus s'arrête, car sinon on obtiendrait une suite (b_k) d'éléments de E telle que pour tout couple d'entiers $r \neq s$: $\|b_r - b_s\| > \delta$; ce qui serait en contradiction avec le fait que E est compact (§ 13.2.25). Par conséquent, il existe un entier $l > 0$ tel que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{l} A_{i_k}.$$

Ainsi, s'achève la démonstration du théorème de Heine-Borel-Lebesgue. ■

11.3.28 Définition d'un chemin

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. On appelle *chemin* de E une application $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : [0,1] \to E$ dont les n fonctions $\gamma_1, \ldots, \gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont continues. Les points $\boldsymbol{\gamma}(0)$ et $\boldsymbol{\gamma}(1)$ sont appelés respectivement l'*origine* et l'*extrémité* de ce chemin.

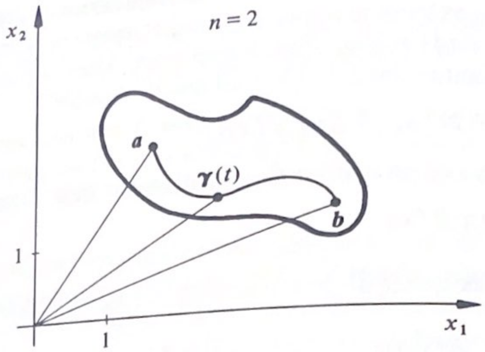


Fig. 11.8

On dit que deux points $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ de E peuvent être *joints par un chemin* s'il existe un chemin de E d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{b}$ (fig. 11.8).

11.3.29 Définition d'un sous-ensemble connexe par arcs de R^n

Un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^n$ est dit *connexe par arcs* si deux points quelconques de E peuvent être joints par un chemin de E.

11.3.30 Connexité par arcs de la boule ouverte

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, la boule ouverte $B(\boldsymbol{x},\delta)$ est connexe par arcs. De même, la boule fermée $\overline{B(\boldsymbol{x},\delta)}$ est connexe par arcs.

DÉMONSTRATION. Soit $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux éléments quelconques de $B(\boldsymbol{x},\delta)$. Puisque pour tout $t \in [0,1] : t\boldsymbol{b} + (1-t)\boldsymbol{a} \in B(\boldsymbol{x},\delta)$, l'application $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to B(\boldsymbol{x},\delta)$ définie par $\boldsymbol{\gamma}(t) = t\boldsymbol{b} + (1-t)\boldsymbol{a}$ est un chemin de $B(\boldsymbol{x},\delta)$ d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{b}$. Ce résultat étant valable pour tout couple d'éléments $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ de $B(\boldsymbol{x},\delta)$, on peut conclure que $B(x,\delta)$ est connexe par arcs.

De façon analogue, on démontre que $\overline{B(\boldsymbol{x},\delta)}$ est aussi connexe par arcs. ∎

11.3.31 Réunion d'une famille de sous-ensembles connexes par arcs de $\mathbb{R}^n$

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles connexes par arcs de $\mathbb{R}^n$ ayant une intersection non vide. Alors,

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i$$

est connexe par arcs.

DÉMONSTRATION. Comme

$$\bigcap_{i\in I} A_i \neq \phi,$$

cette intersection contient au moins un élément, à savoir $\boldsymbol{x}_0$. Soit $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ une paire

d'éléments quelconques de A
$\boldsymbol{b} \in A_{i_2}$. Montrons que $\boldsymbol{a}$ et
A_{i_2} sont connexes par arcs,
$\boldsymbol{\gamma}_1 : [0,1] \to A_{i_1}$, tandis que
$\boldsymbol{\gamma}_2 : [0,1] \to A_{i_2}$. Par conséqu

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_1(2t) \\ \boldsymbol{\gamma}_2(2t-1) \end{cases}$$

est un chemin de A d'origin

11.3.32 Remarque

D'une manière généra
peut rien dire à priori conce
exemple, la réunion des deu
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x+2\}$ n'
des deux connexes par arcs
est connexe par arcs.

11.3.33 Exemple d'un s

Le sous-ensemble
(fig. 11.10).

11.3.34 Lemme

Soit E un sous-en
il existe un chemin de E
sous-ensembles ouverts

d'éléments quelconques de A. Alors, il existe deux indices $i_1, i_2 \in I$ tels que $\boldsymbol{a} \in A_{i_1}$ et $\boldsymbol{b} \in A_{i_2}$. Montrons que $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ peuvent être joints par un chemin de A. Puisque A_{i_1} et A_{i_2} sont connexes par arcs, les points $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{x}_0$ peuvent être joints par un chemin $\boldsymbol{\gamma}_1 : [0,1] \to A_{i_1}$, tandis que les points $\boldsymbol{x}_0$ et $\boldsymbol{b}$ peuvent être joints par un chemin $\boldsymbol{\gamma}_2 : [0,1] \to A_{i_2}$. Par conséquent, l'application $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to A$ définie par

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_1(2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ \boldsymbol{\gamma}_2(2t-1) & \text{si } t \in \,]1/2,1] \end{cases}$$

est un chemin de A d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{b}$. D'où le résultat. ■

11.3.32 Remarque

D'une manière générale, si E_1 et E_2 sont deux connexes par arcs disjoints, on ne peut rien dire à priori concernant la connexité par arcs de leur réunion $E_1 \cup E_2$. Par exemple, la réunion des deux connexes par arcs $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ et $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 2\}$ n'est pas connexe par arcs (fig. 11.9), tandis que la réunion des deux connexes par arcs $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0\}$ et $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ est connexe par arcs.

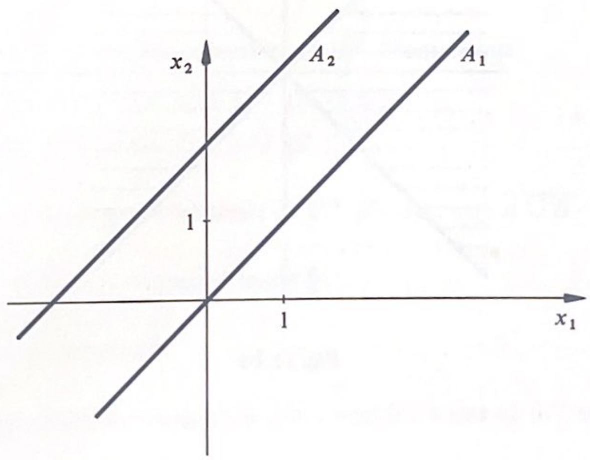


Fig. 11.9

11.3.33 Exemple d'un sous-ensemble connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$

Le sous-ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geqslant 0\}$ de $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs (fig. 11.10).

11.3.34 Lemme

Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{a}$ un élément de E. Alors, $E_1 = \{\boldsymbol{x} \in E :$ il existe un chemin de E d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{x}\}$ et $E_2 = \{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \notin E_1\}$ sont deux sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION. Soit x un élément quelconque de E_1. Par hypothèse, il existe un chemin $\boldsymbol{\gamma}_1 : [0,1] \to E$ d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{x}$. De plus, E étant ouvert, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{x},\delta) \subset E$. Montrons que $B(\boldsymbol{x},\delta) \subset E_1$. En effet, si $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x},\delta)$, l'application $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to E$ définie par

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}(2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ (2t-1)\,\boldsymbol{y} - 2(t-1)\,\boldsymbol{x} & \text{si } t \in \,]1/2,1] \end{cases}$$

est un chemin de E d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{y}$; ce qui entraîne que $\boldsymbol{y} \in E_1$.

Montrons à présent que E_2 est aussi ouvert. Si $E_2 = \phi$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $E_2 \neq \phi$, et soit $\boldsymbol{z}$ un élément quelconque de E_2. Puisque E est ouvert, il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{z},\beta) \subset E$. Comme $\boldsymbol{z} \notin E_1$, on peut affirmer que $B(\boldsymbol{z},\beta) \cap E_1 = \phi$ (car sinon on pourrait relier $\boldsymbol{z}$ à $\boldsymbol{a}$); ce qui implique que $B(\boldsymbol{z},\beta) \subset E_2$. ■

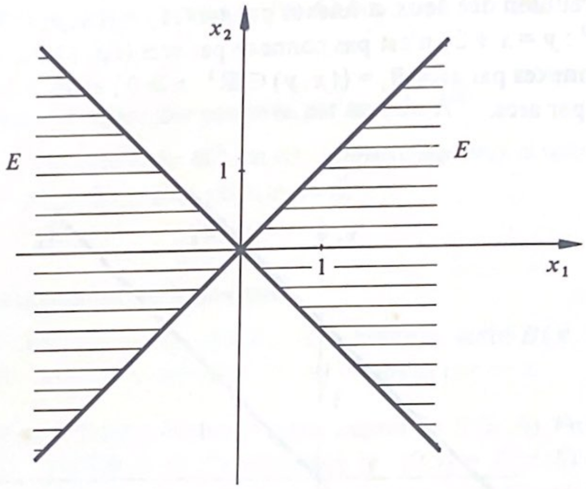


Fig. 11.10

11.3.35 Caractérisation d'un sous-ensemble ouvert et connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$

Soit E un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour que E soit connexe par arcs il faut et il suffit qu'il ne soit pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints.

DÉMONSTRATION. Montrons que la condition est suffisante. Soit $\boldsymbol{a} \in E$. On sait, d'après le lemme 11.3.34, que $E_1 = \{\boldsymbol{x} \in E :$ il existe un chemin de E d'origine $\boldsymbol{a}$ et d'extrémité $\boldsymbol{x}\}$ et $E_2 = \{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} \notin E_1\}$ sont deux sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$. Puisque $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \phi$ et $E_1 \neq \phi$, il résulte de l'hypothèse que $E_2 = \phi$. D'où $E_1 = E$. Comme par construction E_1 est connexe par arcs, E l'est aussi.

Montrons à présent que la condition est nécessaire. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux ouverts non vides disjoints A_1 et A_2 tels que $E = A_1 \cup A_2$. Soit $\boldsymbol{a}_1 \in A_1$ et $\boldsymbol{a}_2 \in A_2$. Puisque E est connexe par arcs. il existe un chemin $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to E$ d'origine $\boldsymbol{a}_1$ et d'extrémité $\boldsymbol{a}_2$. Posons $B = \{t \in [0,1] : \boldsymbol{\gamma}(t) \in A_1\}$.

Comme $\boldsymbol{\gamma}(0) \in A_1$, le nombre réel $s = \operatorname{Sup} B$ existe; ce qui entraîne l'existence d'une suite (t_k) d'éléments de B qui converge vers s. D'autre part, en constatant que $s \in [0,1]$ et que $\boldsymbol{\gamma}(1) \notin A_1$, la suite (r_k) définie par

$$r_k = s + \frac{1-s}{1+k}$$

est une suite d'éléments de $[0,1] \cap \complement B$ qui converge elle aussi vers s. Ainsi, la définition d'un chemin nous permet d'affirmer que $\lim_{k \to +\infty} \boldsymbol{\gamma}(t_k) = \lim_{k \to +\infty} \boldsymbol{\gamma}(r_k) = \boldsymbol{\gamma}(s)$; ce qui implique (§ 11.3.15) que $\boldsymbol{\gamma}(s) \in \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$. Comme de plus $\boldsymbol{\gamma}(s) \in E = A_1 \cup A_2$ et $A_1 \cap A_2 = \phi$, on aboutit à l'alternative suivante: ou bien $\boldsymbol{\gamma}(s) \in A_1 \cap \partial A_2$ ou bien $\boldsymbol{\gamma}(s) \in \partial A_1 \cap A_2$. Supposons d'abord que $\boldsymbol{\gamma}(s) \in A_1 \cap \partial A_2$. Le sous-ensemble A_1 de $\mathbb{R}^n$ étant ouvert, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que $B(\boldsymbol{\gamma}(s), \delta) \subset A_1$; ce qui entraîne, puisque $A_1 \cap A_2 = \phi$, que $B(\boldsymbol{\gamma}(s), \delta) \cap A_2 = \phi$. Ce résultat contredit le fait que $\boldsymbol{\gamma}(s) \in \partial A_2$. D'où $\boldsymbol{\gamma}(s) \notin A_1 \cap \partial A_2$. De manière analogue, on démontre que $\boldsymbol{\gamma}(s) \notin \partial A_1 \cap A_2$. On obtient ainsi une contradiction. Par conséquent, la condition est nécessaire. ■

11.4 EXERCICES

11.4.1 Soit A, B et C trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

1) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
2) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

11.4.2 Soit A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

11.4.3 Soit A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$.
1) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
2) Peut-on inverser l'inclusion?

11.4.4 Montrer que l'adhérence de tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ est bornée.

11.4.5 Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathring{E} = \bar{E}$. Montrer que $E = \mathbb{R}^n$.

11.4.6 Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que $E = \{(x, f(x)) : a \leqslant x \leqslant b\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$.

11.4.7 Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin 1/x\}$. Montrer que

$$\bar{E} = E \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -1 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

11.4.8 Soit $E = \{(m + 1/p, n + 1/q) : m, n \in \mathbb{Z}, p, q \in \mathbb{N} - \{0,1\}\}$.
1) E est-il un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$?
2) E est-il un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$?
3) Calculer $\bar{E}$ et ∂E.

11.4.9 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathring{E} \neq \phi$. Montrer que $\partial \mathring{E} \subset \partial E$.

11.4.10 Soit E un sous-ensemble non vide strictement inclus dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\partial E = \partial \complement E$.

11.4.11 Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ tel que $\partial E = \phi$. Montrer que $E = \mathbb{R}^n$.

11.4.12 Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $x \in \partial E$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de E et une suite d'éléments de $\complement E$ qui convergent vers x.

11.4.13 Soit A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$ tels que $\bar{A} \cap \bar{B} = \phi$. Montrer que $\partial (A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

11.4.14 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Un élément a de $\mathbb{R}^n$ est appelé un *point d'accumulation* de E si pour tout nombre réel $\delta > 0$, l'intersection $E \cap B(a, \delta)$ contient au moins un élément autre que a.

1) Montrer que tous les points d'accumulation d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ appartiennent à son adhérence. En donnant un contre-exemple, montrer que la réciproque est fausse.
2) Démontrer que tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui admet un point d'accumulation, possède une infinité d'éléments.
3) Montrer que tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$ qui n'admet pas de point d'accumulation, ne possède qu'un nombre fini d'éléments. Que devient ce résultat si le sous-ensemble n'est pas borné?
4) Démontrer qu'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement s'il contient tous ses points d'accumulation.

11.4.15 Soit $a_1, \ldots, a_p$ p éléments distincts de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $E = \{a_1, \ldots, a_p\}$ est compact.

11.4.16 Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'adhérence de tout sous-ensemble non vide de E est compact.

11.4.17 Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ inclus dans E telle que pour tout sous-ensemble fini I_0 de I : $\bigcap_{i \in I_0} F_i \neq \phi$. Montrer que

$$\bigcap_{i \in I} F_i \neq \phi.$$

11.4.18 Soit (x_k) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers x. Montrer que la suite numérique $(\|x_k\|)$ converge vers $\|x\|$.

11.4.19 Soit A un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et B un sous-ensemble non vide et fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que

$$\|a - b\| = \operatorname{Inf} \{\|x - y\| : x \in A,\ y \in B\}.$$

11.4.20 Soit E un sous-ens
$\gamma([0,1]) = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n : t \in$

11.4.21 Soit A et B deux
l'intersection $A \cap B$ sont c
arcs.

11.4.22 Soit $E = \{(x, y) \in$
arcs, tandis que $\bar{E}$ (exercic

11.4.23 Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$f(x, y) = \dfrac{\|x - y}{1 + \|x -}$

Montrer que pour tout tri

$f(x, z) \leqslant f(x, y)$

11.4.24 Soit p un nombr
définie, pour tout $x = (x_1$

$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|$

(Pour $p = 2$, on obtient la
pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout

$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|$

11.4.25 (*Produit scalaire*
$x = (x_1, \ldots, x_n)$ et tout y

$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y$

1) Montrer que pour tout

$\langle \lambda x + \beta y, z \rangle = \lambda$

2) En déduire que pour t

$\|x + y\|^2 = \|x\|$

3) Montrer que pour tou

$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\|$

11.4.20 Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to E$ un chemin de E. Montrer que $\gamma([0,1]) = \{\boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1]\}$ est connexe par arcs.

11.4.21 Soit A et B deux sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ tels que l'union $A \cup B$ et l'intersection $A \cap B$ sont connexes par arcs. En déduire que A et B sont connexes par arcs.

11.4.22 Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y = \sin 1/x\}$. Montrer que E est connexe par arcs, tandis que $\overline{E}$ (exercice 11.4.7) ne l'est pas.

11.4.23 Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|}{1+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|}.$$

Montrer que pour tout triplet $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ de $\mathbb{R}^n$:

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \leqslant f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}).$$

11.4.24 Soit p un nombre réel strictement supérieur à 1 et $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, par

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

(Pour $p = 2$, on obtient la norme euclidienne définie au paragraphe 11.1.2). Montrer que pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p.$$

11.4.25 (*Produit scalaire*). Soit $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et tout $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, par

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

1) Montrer que pour tout triplet $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ de $\mathbb{R}^n$ et tout couple de nombres réels α et β :

$$\langle \lambda\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \lambda\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \beta\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle.$$

2) En déduire que pour tout couple d'éléments $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$:

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 \qquad \text{(\textit{égalité de Pythagore})}.$$

3) Montrer que pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \qquad \text{(\textit{inégalité de Cauchy-Schwarz} (§ 6.4.4))}.$$